

# 熱流体解析の基礎

新谷隆二

## 熱流体解析の基礎

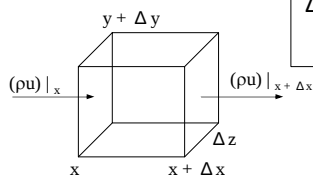
1. 熱流体基礎方程式の基礎方程式
2. 数値解析手法の概要と格子
3. 偏微分方程式の解法
4. 熱流体基礎方程式の解法
5. F O R T R A N の基礎とプログラム例
6. 一般座標の取り扱い
7. 乱流解析の概要

# 1 熱流体の基礎方程式

- 連続の式(質量保存)
- 運動方程式(運動量保存)
- エネルギー方程式(エネルギー保存)

|                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>積分型</p> $\iiint_V \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi - \Gamma \right) dV = 0$ <p>微分型</p> $\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi - \Gamma$ | $\Lambda = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u - \tau \\ \rho E u - \tau \cdot u + q \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho F \\ \rho u \cdot F \end{bmatrix}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 連続の式(質量保存則) 1



質量  $m$  = 密度  $\rho$  × 体積  $V$

質量  $m$  =  $\rho$  × 流速  $u$  × 面積  $A$  × 時間

$\Delta t$  時間の間での質量の収支を考えると(湧き出しなし)

蓄積量 = 流入量 - 流出量

蓄積量  $\Delta \rho \Delta x \Delta y \Delta z$

流入量  $((\rho u)|_x \Delta y \Delta z + (\rho v)|_y \Delta z \Delta x + (\rho w)|_z \Delta x \Delta y) \Delta t$

流出量  $((\rho u)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + (\rho v)|_{y+\Delta y} \Delta z \Delta x + (\rho w)|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) \Delta t$

## 連続の式(質量保存則) 2

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} = -\frac{\Delta(\rho u)}{\Delta x} - \frac{\Delta(\rho v)}{\Delta y} - \frac{\Delta(\rho w)}{\Delta z}$$

$$\Delta \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

密度一定とすると

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ちなみに積分型での連続の式は

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0$$

## 連続の式(質量保存則)まとめ

| 非定常流れ                                                                            |                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 圧縮性流れ<br>$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ | 非圧縮性流れ<br>$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ |

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

| 定常流れ                                          |                                         |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 圧縮性流れ<br>$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ | 非圧縮性流れ<br>$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ |

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

## 運動方程式(運動量保存則) 1

運動の第2法則 ( $F = m\alpha$ ) である力の釣合いを考えることで運動方程式を作る。また、運動量 ( $mu$ ) の保存則 (その系の運動量の総和は不変である) から導くことができる。

$$\text{慣性力} = \text{外力の総和}$$

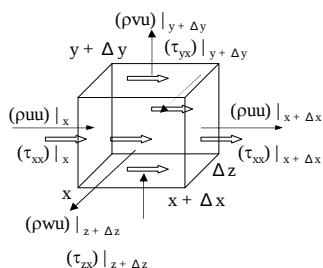
・慣性力

$$\text{質量} \times \text{加速度}$$

・外力

- (1) 場の力 → 重力
- (2) 法線力 → 圧力
- (3) せん断力 → 変形する時の抵抗により生じる力

## 運動方程式(運動量保存則) 2



X方向の運動量

単位時間当たりの蓄積された運動量

$$\frac{\Delta(\rho u)}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

慣性力による単位時間当たりの蓄積される運動量

$$\Delta(\rho uu) \Delta y \Delta z + \Delta(\rho vu) \Delta z \Delta x + \Delta(\rho wu) \Delta x \Delta y$$

場の力による単位時間当たりの蓄積される運動量

$$\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$$

応力による単位時間当たりの蓄積される運動量

$$\Delta \tau_{xx} \Delta y \Delta z + \Delta \tau_{yx} \Delta z \Delta x + \Delta \tau_{zx} \Delta x \Delta y$$

## 運動方程式(運動量保存則) 3

運動量の収支を考え、極限をとると

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w u)}{\partial z} = - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

連続の式及び  $\tau = -\sigma$  の関係を用いると

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$$

ここで、応力は圧力及び変形の関係から

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$



## ニュートン流体の運動方程式

1. 一般式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{g} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

2. 密度一定

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} + \mathbf{g} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

3. 粘度、密度一定 (Navier-Stokesの方程式)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu [\nabla^2 \mathbf{u}] + \mathbf{g}$$

4. 粘度ゼロ (Euler方程式)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

## エネルギー方程式 1

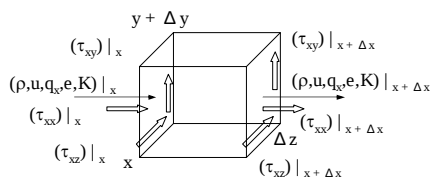
熱力学第1法則である熱と仕事の釣合いを考えることでエネルギー方程式を作る。

考慮するエネルギーは、

- (1) 内部エネルギー:  $e$  ( $c_v T$ )
- (2) 運動エネルギー:  $k$  ( $\frac{1}{2} \bar{u}^2$ )
- (3) 位置エネルギーあるいは重力による仕事
- (4) 熱伝導による熱移動
- (5) 化学反応および電流によって生じる熱
- (6) 応力による仕事 (圧力 - 体積仕事、粘性により散逸される熱)

$$\text{系のエネルギー増加量 (1 + 2)} = \text{流れからのエネルギー} + \text{熱 (4, 5)} + \text{仕事 (6)}$$

## エネルギー方程式 2



X方向のエネルギー

単位時間当たりの蓄積されたエネルギー

$$\Delta G = \left\{ \frac{\Delta(\rho e)}{\Delta t} + \frac{\Delta(\rho K)}{\Delta t} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z$$

系が得るエネルギー

$$\Delta Q_1 = - \left\{ \frac{\Delta(upe)}{\Delta x} + \frac{\Delta(vpe)}{\Delta y} + \frac{\Delta(wpe)}{\Delta z} + \frac{\Delta(u\rho K)}{\Delta x} + \frac{\Delta(v\rho K)}{\Delta y} + \frac{\Delta(w\rho K)}{\Delta z} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z$$

系が得る熱量

$$\Delta Q_2 = - \left( \frac{\Delta q_x}{\Delta x} + \frac{\Delta q_y}{\Delta y} + \frac{\Delta q_z}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + q' \Delta x \Delta y \Delta z$$

系になされる仕事

$$\Delta W = - \left\{ \sum \frac{\Delta(\tau_{xi, xj} u_i)}{\Delta x_i} \right\} \Delta x \Delta y \Delta z + (\rho u g_x + \rho v g_y + \rho w g_z) \Delta x \Delta y \Delta z$$

## エネルギー方程式 3

極限を考え、微分定義を用いると

$$\Delta G = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta W$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} = - \left( \frac{\partial(u_i \rho e)}{\partial x_i} + \frac{\partial(u_i \rho K)}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q' - \frac{\partial \tau_{xi,yj} u_i}{\partial x_i} + \rho u_i g_i$$

$$\rho \frac{D(e+K)}{Dt} = -(\nabla \bullet \mathbf{q}) + (\nabla \bullet [\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{u}]) + \rho(\mathbf{u} \bullet \mathbf{g}) + q'$$

また、運動方程式を用いると

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} = & - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \left( \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \sigma_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + q' \end{aligned}$$

## ニュートン流体のエネルギー式

1. 熱力学の第1法則、フーリエの熱伝導の法則を用いると

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

2. 固体であれば  $u, v, w = 0$  として

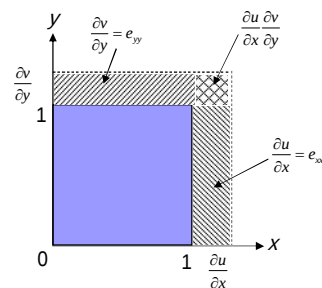
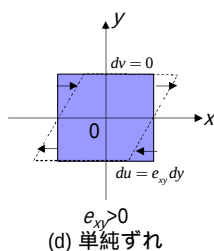
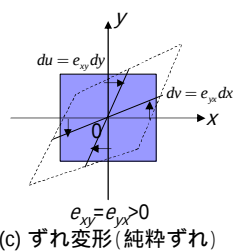
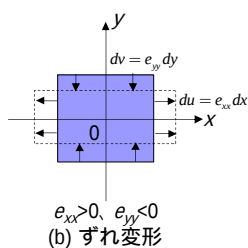
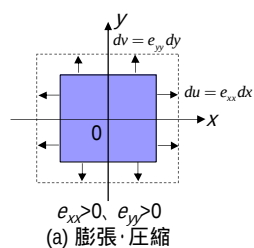
$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

ここで、 $C_p$  は定圧比熱、 $\kappa$  は熱伝導率

## 熱流体の基礎方程式まとめ

|        | 発散型<br>(保存型)                                                                                                                                                                                                                                                                            | 勾配型<br>(非保存型)                                                                                                                                                    |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 連続の式   | $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                  |
| 運動方程式  | $\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \sigma_{ij}) = \rho g_i$                                                                                                                                                                        | $\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$             |
| エネルギー式 | $\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho e u_j - \sigma_{ij} u_i + q_j) = \rho u_i g_i$                                                                                                                                                              | $\rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u_j \frac{\partial e}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i - q_j) + \rho u_i g_i$ |
|        | $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\mu \left( D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ $q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}$ |                                                                                                                                                                  |

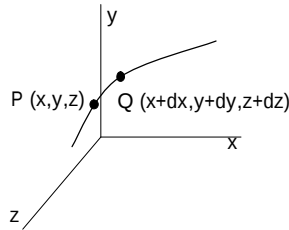
## ニュートン流体の速度勾配と応力の関係1



$$\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 1 \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e_{xx} + e_{yy}$$

応力をひずみ速度の1次式として表す

## ニュートン流体の速度勾配と応力の関係2



$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \left( \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right) \delta_{ij} + \mu e_{ij} + \mu e_{ji}$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu e_{xx} + \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu e_{yy} + \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu e_{zz} + \lambda (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu e_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz}$$

## 積分表示と微分表示の比較

物理量の時間的変化 = 境界面を通しての物理量の出入り  $Q_s$  + 物理量の生成  $Q_v$

| 積分表示の数値解                                                     | 微分表示の数値解                                               |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 物理量の保存が完全<br>物理量は体積平均値<br>輸送量 $Q_s$ の算出が難しい<br>面積 $S$ の表現が面倒 | 物理量の保存が近似的<br>物理量は局所値<br>輸送量 $q_s$ の算出は容易<br>微分の離散化が面倒 |

2つの微分表示の比較

| 対流型 (非保存系)                                                                                   | 拡散型 (保存系)                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 物理量が局所的に保存されない<br>物理量は局所的な値である<br>対流 (移流) 項の精度が問題である<br>対流項が解の安定性を支配する<br>一般的な物理量: $v, h, c$ | 物理量は局所的に保存される<br>物理量は体積平均的な値である<br>流れによる輸送量の算出が問題<br>流れが解の安定性を直接支配しない<br>一般的な物理量: $\rho, \rho v, \rho h, \rho c$ |

$\rho$ : 密度,  $v$ : 速度,  $h$ : エンタルピー,  $c$ : 濃度

## 2 数値解析手法の概要

### ■ オイラー的解法

- 有限差分法……………直感的に分かりやすい
- 有限体積法……………市販ソフトの主流
- 有限要素法……………複雑形状に対応
- 境界要素法……………特別な場合のみ

### ■ ラグランジェ的解法

- 渦法……………圧力は解かない
- 粒子法……………流体粒子の運動に注目

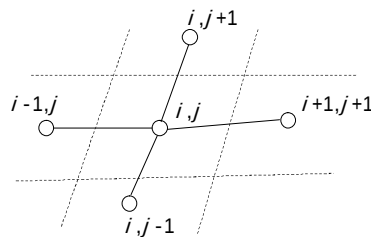
### ■ セルオートマトン解法

- 格子ボルツマン法……………ボルツマン方程式ではない

## 主な数値解析法の概念 1

### ■ 有限差分法 (Finite Difference Method) 差分法

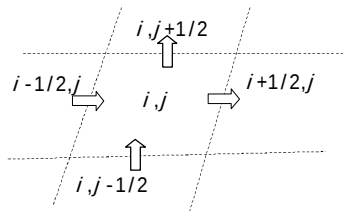
- 微分型の流れの方程式を基礎とし、格子点上でのその解を求めようとする。点と点の間については何も考えないのが基本である。基礎方程式の中の微係数、つまり速度や圧力の勾配は差分商によって近似される。



## 主な数値解析法 の概念 2

### ■ 有限体積法 (Finite Volume Method)

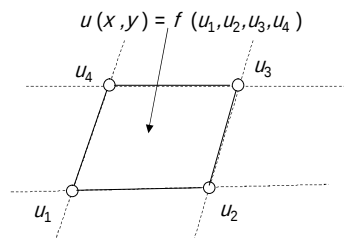
- 積分型の流れの方程式を基礎とする。変数を検査体積 (セル) の代表値としてその解を求めようとする。保存則をセルの境界からの流入・流出と内部での発生・消滅によって表す。



## 主な数値解析法 の概念 3

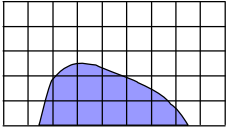
### ■ 有限要素法 (Finite Element Method)

- 基礎方程式としては、微分型ではなく、基底関数を用いて積分した弱形式を用いる。セル内部の分布状態はセル頂点上の変数値と補間関数によって与えられる。



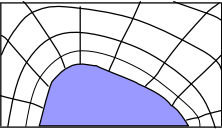
## 数値計算のための格子

構造格子



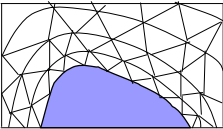
直交格子

- 任意形状に対して自動形成可
- 解適合格子が容易
- 物体境界の精度を上げるためにカットセルや層状格子を組み合わせるなどの方法が用いられる



境界適合格子 (BFC)

- 簡単な形状は成形容易
- 3次元複雑形状には単一格子の形成が困難、マルチブロック法や重なり格子法などが用いられる



非構造格子

- 任意形状に対して自動形成可
- 解適合格子が容易
- 高レイノルズ数流れでは壁近傍に層状の格子を組み合わせるなどの方法が用いられる

## 構造格子と非構造格子の比較

|            | 構造格子        | 非構造格子       |
|------------|-------------|-------------|
| 一般的な計算法    | 有限差分法・有限体積法 | 有限体積法・有限要素法 |
| 複雑形状適合性    | 小さい         | 大きい         |
| 総格子点数      | ムダあり        | 節約可         |
| 1格子あたりの精度  | 高い          | 低い          |
| 1格子あたりの計算量 | 少ない         | 多い          |
| 分解能向上の方法   | 格子を集中させる    | 格子を追加する     |

構造格子 → 乱流現象の解明など高品位な計算向き  
 非構造格子 → 複雑な形状の流れ場における実用計算向き

### 3 偏微分方程式の解法

線形2階偏微分方程式の性質

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

$B^2 - 4AC > 0$  ..... 双曲型 ( $-a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$   $B=0, A=-a^2, C=0$ )

$B^2 - 4AC = 0$  ..... 放物型 ( $y^2 - 4px = 0$   $B=0, A=1, E=-4p$ )

$B^2 - 4AC < 0$  ..... 楕円型 ( $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$   $B=0, A=a^2, C=b^2$ )

代表例

双曲型 (波動方程式)    放物型 (拡散方程式)    楕円型 (ポアソン方程式)

$$-c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(x, y)$$

### 偏微分方程式の性質

1次元波動方程式 (双曲型)

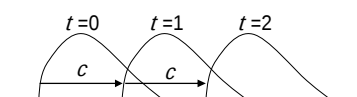
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

この方程式の一般解は、

$$u = f(x - ct) + g(x + ct)$$

図で表すと、形を変えずに  $c$  の速度で平行移動する。



1次元拡散方程式 (放物型)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

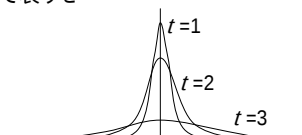
この方程式の特解を

$$u(t, x) = g(t) e^{\sqrt{-1}\xi x}$$

とし、初期条件の下で解を求めると、

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}$$

図で表すと



## 偏微分方程式の型と初期・境界条件

| 問題                                                          | 初期基礎曲線 | 双曲型      | 放物型      | 楕円型      |
|-------------------------------------------------------------|--------|----------|----------|----------|
| コーシー (Cauchy)<br>( $u, u_n$ )                               | 開曲線    | 一意安定 (不) | 条件过剩     | 不安定      |
|                                                             | 閉曲線    | 条件过剩     | 条件过剩     | 条件过剩     |
| ディリクレ (Dirichlet)<br>( $u$ )<br>ノイマン (Neumann)<br>( $u_n$ ) | 開曲線    | 条件不足     | 一意安定 (解) | 条件不足     |
|                                                             | 閉曲線    | 一意でない    | 条件过剩     | 一意安定 (解) |

(不): 不連続解でもよい

(解): 解析的な解

添え字  $n$  は法線方向微分

コーシーの初期条件:  $u$  および  $u_n$  を指定

第1種境界 (ディリクレ) 条件:  $u$  だけを指定

第2種境界 (ノイマン) 条件:  $u_n$  だけを指定

第3種境界 (ロバン) 条件: 第1、第2が混ざったもの

## 差分の基礎1

テーラー展開  $[a, a+h]$  において、 $n$  回の微分が存在すれば、

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

となる。

2階微分の値を  $x-k$ 、 $x+h$  における  $f$  で近似することを考える。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sim af(x-k) + bf(x) + cf(x+h)$$

テーラー展開を考え合わせると

$$\begin{aligned} & af(x-k) + bf(x) + cf(x+h) \\ &= (a+b+c)f(x) + (-ka+hc)\frac{df}{dx} + \left(\frac{k^2}{2}a + \frac{h^2}{2}c\right)\frac{d^2f}{dx^2} + \cdots \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{2}{k(k+h)}, \quad b = -\frac{2}{kh}, \quad c = \frac{2}{h(k+h)}$$

## 差分の基礎2

3点を用いた2階微分の近似式は、

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2}{k(k+h)} f(x-k) - \frac{2}{kh} f(x) + \frac{2}{h(k+h)} f(x+h)$$

また、 $h=k$  とすると、

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

同様に、1階微分は、2階微分の係数が0になる付帯条件を使用して、

$$\frac{df}{dx} = -\frac{h}{k(k+h)} f(x-k) + \frac{h-k}{kh} f(x) + \frac{k}{h(k+h)} f(x+h)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

## 常微分方程式の初期値問題1

連立2元常微分方程式の例

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = -2u - v + x, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 1$$

を簡単な差分で解くとする。

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df}{dx}$$

を利用して、

$$u_{n+1} = u_n + \Delta x v_n, \quad v_{n+1} = v_n + \Delta x (-2u_n - v_n + n\Delta x), \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 1$$

$\Delta x = 0.1$  とすれば、

$$u_1 = u_0 + 0.1v_0 = 0.1, \quad v_1 = v_0 + 0.1(-2u_0 - v_0 + 0 \times 0.1) = 0.9$$

$$u_2 = u_1 + 0.1v_1 = 0.19, \quad v_2 = v_1 + 0.1(-2u_1 - v_1 + 1 \times 0.1) = 0.81$$

$$u_3 = u_2 + 0.1v_2 = 0.271, \quad v_3 = v_2 + 0.1(-2u_2 - v_2 + 2 \times 0.1) = 0.711$$

## 常微分方程式の初期値問題2

2階微分方程式の例

$$\frac{d^2u}{dx^2} = g\left(x, u, \frac{du}{dx}\right), \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{dx}(0) = b$$

を2元の連立方程式に書き換えると、

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = g(x, u, v), \quad u(0) = a, \quad v(0) = b$$

となる。

一般にn階微分方程式の初期値問題は同様の置き換えによってn元の1階微分方程式の初期値問題に置き換えることができる。

1次精度では誤差が大きい

## 常微分方程式の初期値問題3

精度を上げる方法

2次のルンゲ・クッタ法(2次精度)

$$s_1 = f(x_n, u_n)$$

$$s_2 = f\left(x_n + \Delta x, u_n + s_1 \Delta x\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta x}{2}(s_1 + s_2)$$

アダムス・バッシュフォース法(2次精度)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta x}{2}(3f(x_n, u_n) - f(x_{n-1}, u_{n-1}))$$

シンプソン法

$$u^* = u_{n-1} + 2\Delta x f(x_n, u_n)$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u^*)\right)$$

4次のルンゲ・クッタ法(4次精度)

$$s_1 = f(x_n, u_n)$$

$$s_2 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, u_n + \frac{s_1 \Delta x}{2}\right)$$

$$s_3 = f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, u_n + \frac{s_2 \Delta x}{2}\right)$$

$$s_4 = f(x_n + \Delta x, u_n + s_3 \Delta x)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta x}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

アダムス・バッシュフォース法、シンプソン法では、n=0において工夫が必要。

## 常微分方程式の境界値問題 1

2階微分方程式の例

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = x, \quad u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx}(1) = 2$$

区間[0,1]で考えると区間の端(境界)で条件を課していることになる。

今、区間をN等分すると

$$\begin{array}{ccccccccccc} | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ x_0 & x_1 & x_2 & & & & & & & x_n & & & & & & x_{N-1} & x_N & x_{N+1} \end{array}$$

2階微分の差分式を利用して、

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2} + u_n = n\Delta x \quad u_{n-1} + ((\Delta x)^2 - 2)u_n + u_{n+1} = n(\Delta x)^3$$

N+1の仮想点を考えNでの境界条件から、

$$u_{N+1} = u_{N-1} + 4\Delta x \quad 2u_{N-1} + ((\Delta x)^2 - 2)u_N = N(\Delta x)^3 - 4\Delta x$$

n=1からNまでについての連立方程式を解けば良い。

## 常微分方程式の境界値問題 2

N = 3とすると、 $x=1/3$ であるので、

$$\begin{bmatrix} (\Delta x)^2 - 2 & 1 & 0 \\ 1 & (\Delta x)^2 - 2 & 1 \\ 0 & 2 & (\Delta x)^2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta x)^3 \\ 2(\Delta x)^3 \\ 3(\Delta x)^3 - 4\Delta x \end{bmatrix}$$

この3元連立1次方程式を解くと、

$$u_1 = 0.9548, \quad u_2 = 1.840, \quad u_3 = 2.595$$

となる。厳密解は、

$$u = \frac{\sin x}{\cos 1} + x, \quad u(0.333) = 0.9389, \quad u(0.666) = 1.811, \quad u(1) = 2.577$$

となり、誤差は約1.3%程度である

(1) 領域を格子分割する。

(2) 格子点で成り立つ差分方程式をつくる。

(3) 境界条件を考慮して連立方程式を解く。 → トーマス法が有名

## 4 熱流体基礎方程式の解法

熱流体の基礎方程式を解くには、各物理量との対応付けで考える。

すなわち

|        |   |                                                                        |   |                 |
|--------|---|------------------------------------------------------------------------|---|-----------------|
| 連続の式   | : | $\frac{\partial \rho}{\partial t} = f_\rho(\rho, \mathbf{v}, T, P)$    | → | 密度 $\rho$       |
| 運動方程式  | : | $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = f_v(\rho, \mathbf{v}, T, P)$ | → | 速度 $\mathbf{v}$ |
| エネルギー式 | : | $\frac{\partial T}{\partial t} = f_T(\rho, \mathbf{v}, T, P)$          | → | 温度 $T$          |
| 状態方程式  | : | $P = f_P(\rho, \mathbf{v}, T, P)$                                      | → | 圧力 $P$          |

利点

境界条件が速度・圧力で与えられる場合が多く、対応しやすい。  
速度・圧力の量が直感的に分かりやすい。

欠点

結果の表現が流線などと比較すると難しい。  
圧力による誤差が大きい。

このほか、基礎式を渦度方程式やポテンシャル方程式として解く方法がある。

## 境界条件の数

時間については速度、温度、密度ともに1階微分 → 初期条件のみで十分

空間については速度、温度は2階微分、密度(圧力)は1階微分 → 対応した境界条件が必要

○ 1次元での境界条件は、速度と温度は上流と下流で、圧力は上流または下流で値を与える。

下の表は境界条件の数を表しているが、例えば1次元の場合、速度に5個の境界条件を与えると温度と圧力で境界条件を与えることができず、解の結果として温度、圧力が決まることとなる。

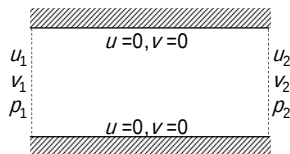
非圧縮性などで密度一定として考える場合、状態方程式は考慮しないため少々面倒である。

非圧縮性流体の場合

|     | 1次元 | 2次元 | 3次元 |
|-----|-----|-----|-----|
| 速度場 | 3   | 10  | 21  |
| 温度場 | 2   | 4   | 6   |
| 合 計 | 5   | 14  | 27  |

|     | 1次元 | 2次元 | 3次元 |
|-----|-----|-----|-----|
| 速度場 | 2   | 8   | 18  |
| 温度場 | 2   | 4   | 6   |
| 合 計 | 4   | 12  | 24  |

## 2次元流れの境界条件の例

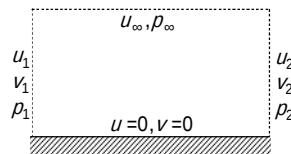


### 上下壁を持つ場合

壁面では、 $u = v = 0$ と4個  
残りの境界条件は4個となる。

入口、出口で  $v_1$ と $v_2$ を与えると残り  
は2個となり

$(u_1, u_2)$ または $(\rho_1, \rho_2)$   
または  $u$  と  $p$  の組合せで条件を  
与える必要があり、これ以上は ×



### 壁面上自由流れの場合

壁面では、 $u = v = 0$ と2個  
自由流は $u_\infty$ を持つとし、 $v_\infty$ は一般  
には定義できないが、圧力 $p_\infty$ は定  
義できる。

残りの境界条件は4個となり、入口  
出口での境界条件は、上下壁を持  
つ場合と同様となる。

## 2次元非圧縮性流れの計算方法1

2次元の非圧縮性流れの基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\kappa}{\rho C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

圧力の時間変化を求めることができない。  
運動方程式と連続の式を満足するように、圧力が決められることになる。

## 2次元非圧縮性流れの計算方法2

X方向の運動方程式について、簡単な時間進行差分を考えてみよう。

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (A^n - \nabla P^n + B^n)$$

ただし、 $n$ は $n \Delta t$ での値、 $\Delta t$ は時間刻み、 $P = p / \rho$ である。また、 $A$ は非線形項(移流)、 $B$ は粘性項(拡散)を表す。

このままでは、離散化誤差、丸め誤差により $n+1$ での連続の式を満足することができず、数値的な発散に至る。そこで、 $n+1$ で連続の式を満足するような圧力を求める。

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (A^n - \nabla P^{n+1} + B^n)$$

両辺の を内積し、 $n+1$ での連続の式を考慮すれば、

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{\nabla \cdot u^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (A^n + B^n)$$

以上が非定常の非圧縮流れ場を求める基本である。→時間変化が無くなれば定常解となる。

## MAC (marker and cell) 系解法の概要1

### 1 部分段階法 (fractional step method)

$$u^F = u^n + \Delta t (A^n + B^n)$$

$$u^{n+1} = u^F - \Delta t \nabla P^{n+1}$$

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{\nabla \cdot u^F}{\Delta t}$$

### 2 S MAC法 (simplified MAC method)

$$u^P = u^n + \Delta t (A^n - \nabla P^n + B^n)$$

$$u^{n+1} = u^P - \Delta t \nabla \phi$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot u^P \quad P^{n+1} = P^n + \phi$$

- $u^F$  は圧力勾配を欠いているので速度の予測となっていない。
- $u^P$  は速度の予測となっており、 $\phi$  はこれを修正する形式をとる。

S MAC法は、第1段階で速度場を予測することにより、境界条件を取り入れやすい

## MAC (marker and cell) 系解法の概要 2

3 HSMAC法 (highly simplified MAC method): 速度と圧力の同時緩和法

$$u^P = u^n + \Delta t (A^n - \nabla P^n + B^n)$$

$$u^{(0)} = u^P, \quad P^{(0)} = P^n$$

$$\psi = - \frac{\omega \nabla \cdot u^{(m)}}{2\Delta t \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right)}$$

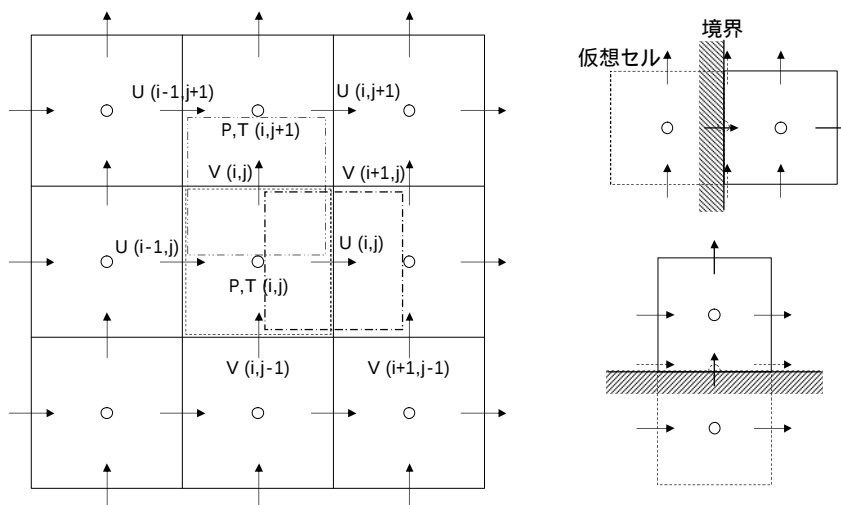
$$u^{(m+1)} = u^{(m)} - \Delta t \nabla \psi, \quad P^{(m+1)} = P^{(m)} + \psi$$

mは反復回数、 $\omega$ は1.7程度の加速係数、 $\nabla \cdot u^{(m)}$ が十分小ならば $u^{n+1} = u^{(m)}$ ,  $P^{n+1} = P^{(m)}$ とする。

HSMAC法は、連続の式の誤差を収束判定条件として使用できる

速度と圧力を同時に反復計算する方法としてSIMPLE法もある。MAC法と区別される場合もあるが、スタガード格子を使用する点では、共通している。SIMPLE法は、対流項と拡散項に陰解法を適用する。

## スタガード格子と変数の定義



## SMAC法の具体的計算法 1

$$U_{i,j}^* = U_{i,j}^n - \Delta t \left( CNVU_{i,j}^n + \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} - DIFU_{i,j}^n \right) \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$V_{i,j}^* = V_{i,j}^n - \Delta t \left( CNVV_{i,j}^n + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta y} - DIFV_{i,j}^n - BUOV_{i,j}^n \right) \cdot \cdot (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\delta P_{i-1,j} + 2\delta P_{i,j} - \delta P_{i+1,j}}{\Delta x^2} \Delta t + \frac{-\delta P_{i,j-1} + 2\delta P_{i,j} - \delta P_{i,j+1}}{\Delta y^2} \Delta t \\ & = - \left( \frac{U_{i,j}^* - U_{i-1,j}^*}{\Delta x} + \frac{V_{i,j}^* - V_{i,j-1}^*}{\Delta y} \right) = -DIFV_{i,j}^* \cdot \cdot \cdot (3) \end{aligned}$$

連立1次方程式を解きδPを求める

$$\delta U_{i,j} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta P_{i,j} - \delta P_{i+1,j}), \quad \delta U_{i-1,j} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta P_{i-1,j} - \delta P_{i,j}) \cdot \cdot (4)$$

$$\delta V_{i,j} = \frac{\Delta t}{\Delta y} (\delta P_{i,j} - \delta P_{i,j+1}), \quad \delta V_{i,j-1} = \frac{\Delta t}{\Delta y} (\delta P_{i,j-1} - \delta P_{i,j}) \cdot \cdot (5)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^* + \delta U_{i,j}, \quad V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^* + \delta V_{i,j}, \quad P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \delta P_{i,j} \cdot \cdot (6)$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n - \Delta t (CNVT_{i,j}^n - DIFT_{i,j}^n) \cdot \cdot \cdot (7)$$

(1)から(6)を繰り返す  
必要であれば、温度場を計算する

## SMAC法の具体的計算法 2

$$\begin{aligned} CNVU_{i,j}^n &= \left( U_{i,j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{|U_{i,j}| \Delta x}{2} \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right)^n \\ &+ \left( V \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{|V| \Delta y}{2} \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} \right)^n \\ V &= \frac{V_{i,j-1} + V_{i,j} + V_{i+1,j-1} + V_{i+1,j}}{4} \\ DIFU_{i,j}^n &= v \left( \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} \right)^n \end{aligned}$$

V及びTの移流項、拡散項についても同様に離散化される

## HSMAC法の具体的計算法

$$^1U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \Delta t \left( CNVU_{i,j}^n + \frac{^1P_{i+1,j}^{n+1} - ^1P_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - DIFU_{i,j}^n \right) \cdots \cdots (1)$$

$$^1V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \Delta t \left( CNVV_{i,j}^n + \frac{^1P_{i,j+1}^{n+1} - ^1P_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - DIFV_{i,j}^n - BUOV_{i,j}^n \right) \cdots \cdots (2)$$

$$^mDIV_{i,j}^{n+1} = \frac{^mU_{i,j}^{n+1} - ^mU_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{^mV_{i,j}^{n+1} - ^mV_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \cdots \cdots (3)$$

$$^mDELP_{i,j}^{n+1} = \frac{OMG * ^mDIV_{i,j}^{n+1}}{2\Delta t \left( (1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 \right)} \cdots \cdots (4)$$

$$^{m+1}P_{i,j}^{n+1} = ^mP_{i,j}^{n+1} + ^mDELP_{i,j}^{n+1} \cdots \cdots (5)$$

$$^{m+1}U_{i,j}^{n+1} = ^mU_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (^mDELP_{i,j}^{n+1}), \quad ^{m+1}U_{i-1,j}^{n+1} = ^mU_{i-1,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (^mDELP_{i,j}^{n+1})$$

$$^{m+1}V_{i,j}^{n+1} = ^mV_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y} (^mDELP_{i,j}^{n+1}), \quad ^{m+1}V_{i,j-1}^{n+1} = ^mV_{i,j-1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta y} (^mDELP_{i,j}^{n+1})$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n - \Delta t (CNVT_{i,j}^n - DIFT_{i,j}^n) \cdots \cdots (6)$$

収束判定条件以下であれば、  
n+1の値とし、n+2のステップ

ニュートン法により $P^{n+1}$ を求める

(1)から(5)を繰り返す  
必要であれば、温度場を計算する

## SIMPLE法の具体的計算法

$$(a_p^u)_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^* + \left( \sum_{nb} a_{nb}^u \cdot u_{nb}^* \right)_{i+1/2,j} = b_{i+1/2,j}^u - \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x_{i+1/2}} \cdots \cdots (1)$$

$$(a_p^v)_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2}^* + \left( \sum_{nb} a_{nb}^v \cdot v_{nb}^* \right)_{i,j+1/2} = b_{i,j+1/2}^v - \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y_{j+1/2}} \cdots \cdots (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left[ \frac{1}{(a_p^u)_{i+1/2,j}} \frac{\delta p_{i+1,j} - \delta p_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2}} - \frac{1}{(a_p^u)_{i-1/2,j}} \frac{\delta p_{i,j} - \delta p_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1/2}} \right] \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[ \frac{1}{(a_p^v)_{i,j+1/2}} \frac{\delta p_{i,j+1} - \delta p_{i,j}}{\Delta y_{j+1/2}} - \frac{1}{(a_p^v)_{i,j-1/2}} \frac{\delta p_{i,j} - \delta p_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1/2}} \right] \\ & = \frac{u_{i+1/2,j}^* - u_{i-1/2,j}^*}{\Delta x_i} + \frac{v_{i,j+1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*}{\Delta y_j} \cdots \cdots (3) \end{aligned}$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \alpha_p \delta p_{i,j} \cdots \cdots (4)$$

$$\delta u_{i+1/2,j} = - \frac{1}{(a_p^u)_{i+1/2,j}} \frac{\delta p_{i+1,j} - \delta p_{i,j}}{\Delta x_{i+1/2}}, \quad \delta v_{i,j+1/2} = - \frac{1}{(a_p^v)_{i,j+1/2}} \frac{\delta p_{i,j+1} - \delta p_{i,j}}{\Delta y_{j+1/2}} \quad (5)$$

$$u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i,j}^* + \delta u_{i+1/2,j}, \quad v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j}^* + \delta v_{i,j+1/2} \cdots \cdots (6)$$

(1)から(6)を繰り返す  
必要であれば、温度場を計算する

## 5 FORTRANの基礎とプログラム例

科学技術計算にはFORTRAN言語が利用されている。これまでの資産も多く利用が可能である。

しかし、FORTRANのバージョンも上がり、昔とは仕様が若干異なっている。

FORTRAN77との相違点 (FORTRAN90 または FORTRAN95)

自由形式となり、7カラム目から書く必要は無い。

コメントは、エクスクラメーションマーク(!)以降となる。

1行に72カラム以上書くことができる。

継続行には&を使用する。

全ての使用する変数を宣言する。(必須ではないが癖にすると良い)

型宣言の方法が変更されている。

GO TO文の使用禁止

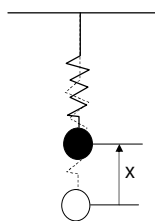
COMMON文の使用禁止 (共通変数は、モジュール定義する)

論理表現 (.GE. .EQ. 等) の関係子化 (>= ==)

DO WHILE文、ブロックIF文、CASE文が使用可能

配列の拡張表現が可能 → プログラムの簡略化

### 単振動のプログラム例1



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$t = 0$$

$$x = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 0$$

```

Program HMotion
  Real xn, vn, xnp, vnp, xtheo
  Real t, dt, akm, sakm
  Integer nlast, nprint, i
  vn = 0.0
  xn = 1.0
  t = 0.0
  !
  akm = 1.0
  dt = 0.1
  sakm = Sqrt(akm)
  nlast = 300
  nprint = 10
  !
  Do i = 1, nlast
    t = t + dt
    vnp = vn - akm * xn * dt
    xnp = xn + vn * dt
    xtheo = Cos(t * sakm)
    If ( i/nprint*nprint == i ) then
      Print *, t, xnp, xtheo
    End If
    xn = xnp
    vn = vnp
  End do
End Program HMotion
  
```

オイラー陽解法

をオイラー陰解法にすると

```

Do i = 1, nlast
  t = t + dt
  vnp = (vn - akm*xn*dt)/(1.0+akm*dt*dt)
  xnp = (xn+dt*vn)/(1.0+akm*dt*dt)
  xn = xnp
  vn = vnp
End do
  
```

予測子・修正子にすると

```

Do i = 1, nlast
  t = t + dt
  vt = vn - akm * xn * dt
  xt = xn + vn * dt
  vnp = vn - 0.5 * akm * (xt + xn) * dt
  xnp = xn + 0.5 * (vt + vn) * dt
  xn = xnp
  vn = vnp
End do
  
```

Excelでも計算可能

## 単振動のプログラム例2

アダムス・バッシュフォース法では

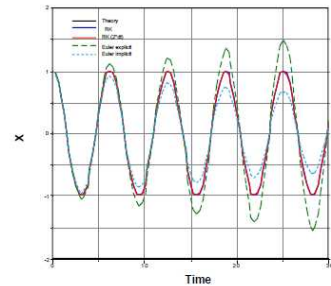
```
xnm = 1.0
vnm = 0.0
Do i = 1, nlast
  t = t + dt
  vnp = vn - 0.5 * akm * (3.0 * xn - xnm) * dt
  xnp = xn + 0.5 * (3.0 * vn - vnm) * dt
  xnm = xn
  vnm = vn
  xn = xnp
  vn = vnp
End Do
```

2次のルンゲ・クッタ法では

```
Do i = 1, nlast
  vnh = vn - 0.5 * akm * xn * dt
  xnh = xn + 0.5 * vn * dt
  t = t + dt
  vnp = vn - akm * xnh * dt
  xnp = xn + vnh * dt
  xn = xnp
  vn = vnp
End Do
```

クラーク・ニコルソン法では

```
Do i = 1, nlast
  t = t + dt
  xnp = (4.0*dt/(4.0+akm*dt*dt))*(vn+(4.0-akm*dt*dt)*xn/(4.0*dt))
  vnp = ((4.0-akm*dt*dt)*xnp-(4.0+akm*dt*dt)*xn)/(4.0*dt)
  xn = xnp
  vn = vnp
End do
```

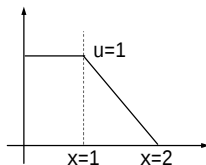


## 1次元バーガース方程式プログラム例1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$t = 0$$

$$u = \begin{cases} 1 & (x \leq 1) \\ 1-x & (1 < x \leq 2) \\ 0 & (x > 2) \end{cases}$$



時間: オイラー陽解法  
空間: 中心差分

```
! Euler explicit: first order
!
Module Burgers_var
  Integer, Parameter :: mimax = 301
  Real(8) u(mimax), un(mimax)
End Module Burgers_var
!*****
! Program Burgers
  Use Burgers_var
  Implicit None
  Integer imax, i1, i2, i
  Integer n, nlast, nprint
  Real(8) dx, crno, dt, al, time
  Real(8) Re
!-----
! 初期条件等の設定
dx = 0.01
crno = 0.1
dt = crno * dx
al = dx * Real(mimax - 1)
Re = 100.0
imax = mimax
nlast = 3000
nprint = 1000
time = 0.0
i1 = Int(1.0 / dx)
```

```
i2 = Int(2.0 / dx)
u(1:i1) = 1.0
Do i = i1+1, i2
  u(i) = 1.0 - Real(i - i1)/Real(i2 - i1)
End Do
u(i2+1:imax) = 0.0
!-----
! 計算開始
Do n = 1, nlast
  time = Real(n) * dt
  Do i = 2, imax - 1
    un(i) = u(i) + dt*(u(i)*(u(i) &
      & *(u(i+1) - u(i-1)))/(2.0*dx) &
      & +(u(i+1) - 2.0*u(i) + u(i-1))) &
      & / (Re*dx*dx))
  End Do
! 境界条件の処理
  un(1) = un(2)
  un(imax) = un(imax-1)
! 値の置換
  u = un
  If(n == nprint*nprint) Then
    Print *, (u(i), i=1, imax)
  End If
End Do
End Program Burgers
```

## 1次元バーガース方程式プログラム例2

時間:オイラー陰解法  
空間:中心差分

```
! Euler implicit: first order
!
Module BurgersIm_var
  Integer, Parameter :: mimax = 301
  Real(8) u(mimax), un(mimax)
  Real(8) a(mimax,2), b(mimax)
End Module BurgersIm_var
!*****
Program BurgersIm
  Use Burgers_var
  Implicit None
  Integer imax, i1, i2, i
  Integer n, nlast, nprint
  Real(8) dx, crno, dt, al, time
  Real(8) Re, Redx2, ccc
!-----
! 初期条件等の設定
dx = 0.01
crno = 0.1
dt = crno * dx
al = dx * Real(mimax - 1)
Re = 100.0
imax = mimax
```

```
nlast = 3000
nprint = 1000
time = 0.0
i1 = Int(1.0 / dx)
i2 = Int(2.0 / dx)
u(1:i1) = 1.0
Do i = i1+1, i2
  u(i) = 1.0 - Real(i - i1) / Real(i2 - i1)
End Do
u(i2+1:imax) = 0.0
Redx2 = Re * dx * dx
ccc = 1.0 / (Redx2 + 2.0 * dt)
!-----
! 計算開始
Do n = 1, nlast
  time = Real(n) * dt
! 行列の設定
  a(2:imax-1,1) = -(Re*dx*u(2:imax-1) &
    & + 2.0)*0.5*dt*ccc
  a(2:imax-1,2) = (Re*dx*u(2:imax-1) &
    & - 2.0)*0.5*dt*ccc
  b(i) = Redx2 * u * ccc
! 境界条件
  a(1,1) = 0.0
  a(1,2) = 0.0
  b(1) = 1.0
!-----
```

```
a(imax,1) = -1.0
a(imax,2) = 0.0
b(imax) = 0.0
! 三項方程式の解法
Call Trdiag (imax, a, b, un)
!
  u = un
  If(n == n/nprint*nprint) Then
    Print *, (u(i), i=1,imax)
  End If
End Do
End Program BurgersIm
```

## 6 一般座標系の扱い

実用問題 → 複雑な境界を持つ → 矩形格子では分割しにくい。

座標変換を考える。

$$\xi = \xi(x) \quad x = x(\xi)$$

例えば、 $\xi = \sqrt{x}$  を考えると 等間隔の  $\xi$  に対して、 $x=0$  の付近で間隔が狭まる不等間隔に変換できる。

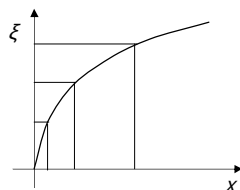
微分係数がどのように変換されるかを考えると、チェインルールにより、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

2次元では、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$



## 一般座標系の扱い2

変換のヤコビアンを用いて、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

ここで、係数部分に中心差分を用いれば、

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y(\xi, \eta + \Delta\eta) - y(\xi, \eta - \Delta\eta)}{2\Delta\eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y(\xi + \Delta\xi, \eta) - y(\xi - \Delta\xi, \eta)}{2\Delta\xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x(\xi, \eta + \Delta\eta) - x(\xi, \eta - \Delta\eta)}{2\Delta\eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x(\xi + \Delta\xi, \eta) - x(\xi - \Delta\xi, \eta)}{2\Delta\xi}$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\xi\Delta\eta}$$

## 一般座標系の扱い3

2階微分について考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{1}{J^2} \left( \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{J^3} \left( \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{J^3} \left( \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

## 一般座標系の扱い14

3次元の場合

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x + u_\varsigma \varsigma_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\varsigma \varsigma_y$$

$$u_z = u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\varsigma \varsigma_z$$

$$\xi_x = \frac{y_\eta z_\varsigma - y_\varsigma z_\eta}{J}, \eta_x = \frac{y_\varsigma z_\xi - y_\xi z_\varsigma}{J}, \varsigma_x = \frac{y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi}{J}$$

$$\xi_y = \frac{x_\varsigma z_\eta - x_\eta z_\varsigma}{J}, \eta_y = \frac{x_\xi z_\varsigma - x_\varsigma z_\xi}{J}, \varsigma_y = \frac{x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta}{J}$$

$$\xi_z = \frac{x_\eta y_\varsigma - x_\varsigma y_\eta}{J}, \eta_z = \frac{x_\xi y_\varsigma - x_\varsigma y_\xi}{J}, \varsigma_z = \frac{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}{J}$$

$$J = x_\varsigma y_\eta z_\xi + x_\eta y_\varsigma z_\xi + x_\xi y_\varsigma z_\eta - x_\xi y_\varsigma z_\eta - x_\eta y_\xi z_\varsigma - x_\varsigma y_\eta z_\xi$$

## 一般座標系の扱い15

3次元の場合の2階微分

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \varsigma_x^2 u_{\varsigma\varsigma} + 2(\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x \varsigma_x u_{\eta\varsigma} + \varsigma_x \xi_x u_{\xi\varsigma}) + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} u_\eta + \varsigma_{xx} u_\varsigma$$

$$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \varsigma_y^2 u_{\varsigma\varsigma} + 2(\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y \varsigma_y u_{\eta\varsigma} + \varsigma_y \xi_y u_{\xi\varsigma}) + \xi_{yy} u_\xi + \eta_{yy} u_\eta + \varsigma_{yy} u_\varsigma$$

$$u_{zz} = \xi_z^2 u_{\xi\xi} + \eta_z^2 u_{\eta\eta} + \varsigma_z^2 u_{\varsigma\varsigma} + 2(\xi_z \eta_z u_{\xi\eta} + \eta_z \varsigma_z u_{\eta\varsigma} + \varsigma_z \xi_z u_{\xi\varsigma}) + \xi_{zz} u_\xi + \eta_{zz} u_\eta + \varsigma_{zz} u_\varsigma$$

ここで、
$$\xi_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varsigma}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial \varsigma}$$

さらに式を展開すれば良いが、式が非常に長くなる。

そこで、次のように1階微分を差分近似を求める。ここで、 $A = \xi x$ である。

$$\xi_{xx} \sim A_{ijk} \frac{A_{i+1,j,k} - A_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} + B_{ijk} \frac{A_{i,j+1,k} - A_{i,j-1,k}}{2\Delta\eta} + C_{ijk} \frac{A_{i,j,k+1} - A_{i,j,k-1}}{2\Delta\varsigma}$$

$$\eta_{xx} \sim A_{ijk} \frac{B_{i+1,j,k} - B_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} + B_{ijk} \frac{B_{i,j+1,k} - B_{i,j-1,k}}{2\Delta\eta} + C_{ijk} \frac{B_{i,j,k+1} - B_{i,j,k-1}}{2\Delta\varsigma}$$

$$\varsigma_{xx} \sim A_{ijk} \frac{C_{i+1,j,k} - C_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} + B_{ijk} \frac{C_{i,j+1,k} - C_{i,j-1,k}}{2\Delta\eta} + C_{ijk} \frac{C_{i,j,k+1} - C_{i,j,k-1}}{2\Delta\varsigma}$$

## 2次元非圧縮性基礎式への適用

無次元化された2次元非圧縮性ナビエーストックスの式に座標変換を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{\xi\eta}^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial \xi} + V \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{J} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{\xi\eta}^2 v \\ U &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} u - \frac{\partial x}{\partial \eta} v \right), \quad V = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v - \frac{\partial y}{\partial \xi} u \right) \\ \nabla_{\xi\eta}^2 u &= \frac{1}{J^2} (\alpha u_{\xi\xi} - 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}) \\ &\quad + \frac{1}{J^3} (\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) (y_{\xi} u_{\eta} - y_{\eta} u_{\xi}) + \frac{1}{J^3} (\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) (x_{\eta} u_{\xi} - x_{\xi} u_{\eta}) \\ \alpha &= (x_{\eta})^2 + (y_{\eta})^2, \quad \beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}, \quad \gamma = (x_{\xi})^2 + (y_{\xi})^2 \end{aligned}$$

## 参考1 数値計算のための変換式

2次元の場合において、具体的な計算式を誘導する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} = x_{\xi}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = x_{\eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi} = y_{\xi}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = y_{\eta} \end{aligned}$$

境界(端)においては、

$$\begin{aligned} x_{\xi(i=1,j)} &= \frac{-3x_{1,j} + 4x_{2,j} - x_{3,j}}{2\Delta\xi}, & x_{\xi(i=i_{\max},j)} &= \frac{x_{i_{\max}-2,j} - 4x_{i_{\max}-1,j} + x_{i_{\max},j}}{2\Delta\xi} \\ x_{\eta(i,j=1)} &= \frac{-3x_{i,1} + 4x_{i,2} - x_{i,3}}{2\Delta\eta}, & x_{\eta(i,j=j_{\max})} &= \frac{x_{i,j_{\max}-2} - 4x_{i,j_{\max}-1} + x_{i,j_{\max}}}{2\Delta\eta} \end{aligned}$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - y_{\xi} x_{\eta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} y_{\eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} y_{\xi}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} x_{\eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} x_{\xi}$$

## 参考2 数値計算のための変換式

2階微分は、

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi_x}{\partial \eta} = \xi_{x(i,j)} \frac{\xi_{x(i+1,j)} - \xi_{x(i-1,j)}}{2\Delta \xi} + \eta_{x(i,j)} \frac{\xi_{x(i,j+1)} - \xi_{x(i,j-1)}}{2\Delta \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \xi_{y(i,j)} \frac{\xi_{y(i+1,j)} - \xi_{y(i-1,j)}}{2\Delta \xi} + \eta_{y(i,j)} \frac{\xi_{y(i,j+1)} - \xi_{y(i,j-1)}}{2\Delta \eta}$$

速度の微分を考えると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \xi_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta \xi} + \eta_x \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta \eta}$$

速度の2階微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \xi_x \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta_x}{\partial x} + \eta_x \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ &= (\xi_x)^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + (\eta_x)^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} u_\eta \end{aligned}$$

## 参考3 数値計算のための変換式

変換後の2階微分は、

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta \xi)^2}, \quad u_{\eta\eta} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta \eta)^2}$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta \xi \Delta \eta}$$

ここで、 $\Delta \xi$ 、 $\Delta \eta$  は任意に取れるので、1と置くと座標値だけで各係数が計算できることになる。  
また、ラプラシアンは次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \left\{ (\xi_x)^2 + (\xi_y)^2 \right\} u_{\xi\xi} + 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_{\xi\eta} + \left\{ (\eta_x)^2 + (\eta_y)^2 \right\} u_{\eta\eta} \\ &\quad + (\xi_{xx} + \xi_{yy}) u_\xi + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) u_\eta \end{aligned}$$

$u$  のラプラシアンを示したが、 $P$  や  $\delta P$  のラプラシアンも同様の式となる。

## 補足 連立方程式の解法 1

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

これをベクトルで表すと、

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ここで、Aは $n \times n$ の正方行列で正則であるとする。(逆行列が存在する)  
xを求める方法としては、直接法と間接法(反復法)に大別できる。

## 補足 連立方程式の解法 2

### 解法の分類

- 1 直接法(丸め誤差がなければ真値を与える)
  - (1) 逆行列を求める方法
  - (2) LU分解法
  - (3) 消去法(ガウスの消去法、ガウス - ジョルダン法)
- 2 間接法(反復法 近似値を求める)
  - (1) 定常的反復法(ヤコビ法、ガウス - ザイデル法、SOR法等)
  - (2) 非定常的反復法(残差法、勾配法)
    - (a) 勾配法(CG、ICCG、BiCG、BiCGSTAB、CGS) → 対称行列の場合
    - (b) 残差法(CR、GMRES、QMR) → 非対称行列の場合

一般的に、反復法は直接法に比べて計算時間と計算容量の面で有利であり、解析にはほとんど反復法が用いられる。

定常的反復法は、残差は非常にゆっくりと単調減少する。反復計算1回に要する演算量は少ない。  
非定常的反復法は、収束は定常のより早い、反復計算1回に要する演算量は多い。

以下 直接法と反復法の代表的な解法について記す。

## 補足 直接法(ガウスの消去法)

$$Ax = b$$

$$GAX = UX = Gb$$

前進消去で、下三角行列を0とする。次に後退代入によりxが求まることになる。つまり、

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

これより、

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} \{ b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n \}$$

各対角成分をピボットと言うが、この値が非常に小さいとこれを用いた除算で桁落ちを生じてしまう。通常、これを避けるため最も大きなピボットで除算するように式の順番を入れ替えて計算を行う。

## 補足 直接法(トーマス法)

3重対角行列の解法

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

(1)  $Ax = LUx = b$  で  $Ux=y$  と置き、 $Ly = b$  を解く

$$U_1 = u_{12} = a_{12}/a_{11} = C_1/B_1, \quad y_1 = b_1/a_{11} = D_1/B_1$$

$$U_i = u_{i,i+1} = C_i/(B_i - A_i U_{i-1}) \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

$$y_i = \frac{D_i - A_i y_{i-1}}{B_i - A_i U_{i-1}} \quad (2 \leq i \leq n)$$

(2)  $Ux = y$  を解く

$$x_n = y_n, \quad x_{n-1} = y_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$$

## 補足 反復法

- (1) 初期値の設定
  - (2) 反復公式
  - (3) 収束判定を行い目的の精度が得られるまで(2)を繰り返す。
- 今、行列Aを次のように分解する。

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & \cdot & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdot & -a_{1n} \\ & 0 & \cdot & \\ & & \cdot & -a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dx = (E + F)x + b \Rightarrow x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)}) = Tx^{(n)} + Cb$$

## 補足 反復法(ヤコビ法)

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \{ b + (E + F)x^{(k)} \}$$

成分であらわせば、

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k) \end{cases}$$

この方法は、計算時間を要するが、並列計算に向いている。

## 補足 反復法(ガウスザイデル法)

ヤコビ法で $x_1$ から求めるとし、最新の $x$ を用いて計算するとすれば、

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1} \{ \mathbf{b} + E\mathbf{x}^{(k+1)} + F\mathbf{x}^{(k)} \}$$

成分であらわせば、

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1}) \end{cases}$$

## 補足 反復法(SOR法)

ガウスザイデル法は、 $k$ 段階の反復で得られた値に $\delta = x^{k+1} - x^k$ を加えたものと解釈できる。そこで、この修正値に $\omega$  (緩和係数) を乗じて加えることにする。 $1 < \omega$  の時をSOR法、 $0 < \omega < 1$  の時をSUR法という。

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \left\{ \frac{1}{\omega} (D - \omega E) \right\}^{-1} \frac{1}{\omega} \{ (1 - \omega)D + \omega F \} \mathbf{x}^k + \left\{ \frac{1}{\omega} (D - \omega E) \right\}^{-1} \mathbf{b}$$

成分であらわせば、

$$\begin{aligned} \delta_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{ii}} (b_i - a_{i1}x_1^{k+1} - a_{i2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{k+1} - a_{i,i+1}x_{i+1}^k - \cdots - a_{in}x_n^k) \\ x_i^{k+1} &= x_i^k + \omega (\delta_i^{k+1} - x_i^k) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega = 1$  の場合は、ガウスザイデル法と一致する。

係数行列 $A$ を $D-E-F$ と分離した時、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ の全ての要素を正とできる場合、 $0 < \omega < 1$  で収束することとなる。

## 補足 反復法 (CG法)

クリロフ部分空間法の中で、対称行列を対象とした解法は勾配法 (gradient method) という。残差と係数行列の逆行列との内積からなる汎関数を最小にすることで未知数を求める。

$$G(x) = (x \bullet Ax) - 2(x \bullet b)$$

汎関数  $G$  を最小にすればよい。実際の解法は、適当な初期値から順次修正を加えていく。

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

ここで、 $\alpha$  は修正の大きさ、 $p$  は修正の方向である。

したがって、

$$\frac{\partial G(x_k + \alpha_k p_k)}{\partial \alpha_k} = 0$$

修正ベクトルとして係数行列  $A$  に共役な関係を満たすように決定する場合を共役勾配法 (conjugate gradient method) という。つまり、

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, \quad \beta_k = -\frac{(r_{k+1} \bullet A p_k)}{(p_k \bullet A p_k)}$$

共役方向を探索することにより、 $n$  回で解を得ることができる。収束途中で計算を打ち切った場合は、真の値の近似値になっているとは限らない。また、一般に丸め誤差の影響を受けやすい。

## 補足 反復法 (Bi-CGSTAB法)

勾配法は対称行列を対象としているが、これを非対称行列へ適用できるように改良したものが、安定化双共役勾配法 (Bi-CGSTAB) という。

計算手順

(1) 初期ベクトルを設定し、

$$r_0 = b - Ax_0, \quad p_0 = r_0$$

$$(s \bullet r) \neq 0 \text{ となる } s \text{ を選ぶ。ここでは } s = r_0$$

(2)  $k=1, 2, \dots$  について以下の手順を繰り返す。

$$\alpha_k = \frac{(s \bullet r_k)}{(s \bullet A p_k)}, \quad t_k = r_k - \alpha_k A p_k, \quad \xi_k = \frac{(A t_k \bullet t_k)}{(A t_k \bullet A t_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k + \xi_k t_k, \quad r_{k+1} = t_k - \xi_k A t_k$$

収束条件を満たさない場合次の式にしたがって  $\beta$  と  $p$  を求めて繰り返す。

$$\beta_k = \frac{\alpha_k (s \bullet r_{k+1})}{\xi_k (s \bullet r_k)}$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k (p_k - \xi_k A p_k)$$

## 補足 反復法(CR法1)

クリロフ部分空間法で非対称行列など一般的な係数行列を対象とした解法が、残差法(residual method)である。  
勾配法と同様に汎関数を最小にすることを考える。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}_{k+1}) &= (\mathbf{r}_{k+1} \bullet \mathbf{r}_{k+1}) = (\mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k) \bullet (\mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k) \\ &= (\alpha_k)^2 (A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k) - 2\alpha_k (\mathbf{r}_k \bullet A\mathbf{p}_k) + (\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_k) \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}_k \bullet A\mathbf{p}_k)}{(A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k)} \end{aligned}$$

また、勾配法と同様に修正方向に共役方向を選ぶ場合を共役残差法(conjugate residual method)という。

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_{k+1} \bullet A^T A\mathbf{p}_k) &= (A\mathbf{r}_{k+1} \bullet A\mathbf{p}_k) + \beta_k (A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k) = 0 \\ \beta_k &= -\frac{(A\mathbf{r}_{k+1} \bullet A\mathbf{p}_k)}{(A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k)} \end{aligned}$$

## 補足 反復法(CR法2)

共役残差法の計算手順

(1) 初期ベクトルを設定し、

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$$

(2)  $k=0,1,2,\dots$ について以下を繰り返す。

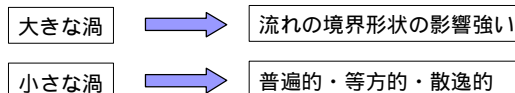
$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}_k \bullet A\mathbf{p}_k)}{(A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k \\ \beta_k &= -\frac{(A\mathbf{r}_{k+1} \bullet A\mathbf{p}_k)}{(A\mathbf{p}_k \bullet A\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \end{aligned}$$

## 7 乱流解析の概要

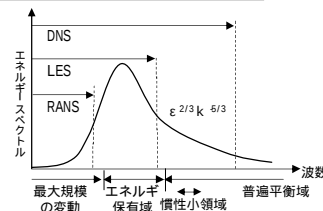
乱流は、平均流れと乱れとして方程式を解くことになる。乱れの効果は乱流応力 (turbulence stress) という形で平均流れの方程式に現れる。この応力を何らかの形で近似することを乱流モデルという。

乱流は大小様々な渦からできている。現状では、コンピュータの性能、メモリ容量の制約から、全ての渦を計算することは特別な場合のほかは不可能である。

しかし、現実に必要なものは、全ての乱流運動のデータではなく、大まかな流れの状況であることがほとんどである。



完全なシミュレーション → FTS  
直接シミュレーション → DNS  
大規模渦シミュレーション → LES  
平均流れのシミュレーション → RANS



## 渦粘性モデル(1)・・・RANS

渦粘性モデルは、レイノルズ応力の非等方部分を平均流れのひずみと比例関係においたもので、レイノルズ平均された運動方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

ナビエ・ストークスの式と比較すれば、動粘性係数に渦動粘性係数が加わり、圧力項には

$$P = p + \frac{2}{3} \rho k, \quad k = u'_i u'_i / 2$$

レイノルズ応力の等方成分が加わったものとなる。

渦動粘性係数のモデル化の代表的なものとして次のモデルが考えられている。

- (1) 0 方程式モデル (レイノルズ平均流れ場の情報だけで渦動粘性係数を決定する)
- (2) 2 方程式モデル (渦動粘性係数を長さ、時間、速度のうち二つのパラメータで決定する)
- (3)  $k - \varepsilon$  モデル (2 方程式モデルの一つで、乱れエネルギー  $k$  と散逸率  $\varepsilon$  で決定する)

$k - \varepsilon$  モデルは、工学的・工業的な応用分野において最も多く用いられている。

## 渦粘性モデル(2)・・・RANS

### 0 方程式モデル

プラントルの混合長モデル(mixing length model)から

$$\nu_T = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

乱流境界層では、 $l_m = ky$  によって、対数速度分布が得られる。

乱流場に拡張し、速度勾配の大きさとしては、ひずみ速度テンソルが渦度の大きさを採用すると、

$$\nu_T = l_m^2 (2D_{ij}D_{ij})^{1/2}$$

$$\nu_T = l_m^2 (\omega_i \omega_i)^{1/2}, \quad \omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

いずれにしても、 $l_m$ を与えることによって、渦動粘性係数を求めることができれば、平均流れが求まる。しかし、 $l_m$ には何らかの経験的要素が導入されるため、普遍的なモデルにはなりにくい。

## 渦粘性モデル(3)・・・RANS

### 標準 k - ε モデル (高レイノルズ数型)

2方程式モデルの代表的なものである

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2(\nu + \nu_T) D_{ij})$$

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92$$

## 渦粘性モデル(4)・・・RANS

低レイノルズ数型 k - ε モデル

壁近傍まで取り扱えるように修正されたもの

$$v_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \varepsilon + D + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{v_T}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + E + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.4, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.5, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9$$

$$f_\mu = \left( 1 - \exp(-y^*/14) \right)^2 \left( 1 + 5/Rt^{3/4} \exp(-(Rt/200)^2) \right)$$

$$f_2 = \left( 1 - \exp(-y^*/3.1) \right)^2 \left( 1 - 0.3 \exp(-(Rt/6.5)^2) \right)$$

$$D = E = 0, \quad f_1 = 1$$

## 渦粘性モデル(5)・・・RANS

k - ε モデルの特徴と展開

利点

1. 経験的に与えるパラメータが少なく、定数群の推奨値が定着している。
2. 壁法則により壁付近の格子点数を節約する方法が提案されており、実用計算向きである。
3. 渦粘性が常に正の値で、数値計算の安定性が比較的良好である。

使用にあたって問題となる場合

1. 渦粘性近似が成立しない場合
2. 垂直応力成分の非等方成分が顕著になる場合
3. 局所平衡 ( $P_k$  -  $\varepsilon$ ) から逸脱した流れ
4. 時間スケール  $k / \varepsilon$ 、長さのスケール  $k^{3/2} / \varepsilon$  が不適切な場合

標準的な k - ε で表現できないような流れでは、大規模な非定常渦が支配的な場合が多く、高次の展開の収束は期待できない。 → LESの方が良い

k - ε モデルは、商用コードに使用され、他のモデルより多く使われるようになった。

## 応力方程式モデル(1)・・・RANS

応力方程式モデルは、変動速度について運動方程式をレイノルズ平均することのより得ることができる。英語の慣用表現として次のようなものがあるが応力方程式モデルを表すものである。

(1) Reynolds Stress Equation Model: R S M または R S E

(2) Differential Second-moment Closure Model: D S M

(3) Second-moment Closure Model: S M C

レイノルズ応力テンソル  $\tau_{ij}$  に対する支配方程式は

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (J_{(T)ijk} + J_{(P)ijk} + J_{(V)ijk})$$

$$P_{ij} = -\tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \Pi_{ij} = p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad \varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$$

$$J_{(T)ijk} = -u'_i u'_j u'_k \quad J_{(P)ijk} = -p' u'_i \delta_{jk} - p' u'_j \delta_{ik} \quad J_{(V)ijk} = \nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k}$$

右辺第1項は生成項、第2項は圧力 - ひずみ相関、第3項は散逸、第4項は拡散である。  
ここで、圧力 - ひずみ相関  $\Pi$ 、散逸項  $\varepsilon$  と乱流拡散  $J_{(T)} + J_{(P)}$  にモデルが必要となる。

## 応力方程式モデル(2)・・・RANS

圧力 - ひずみ相関のモデル

圧力変動  $p'$  のポアソン式の解考えると

$$\Pi_{ij} = \Pi_{(1)ij} + \Pi_{(2)ij} + \Pi_{(3)ij}$$

ここで、第1項はスロー項と呼ばれ、変動成分を介して変化する部分、第2項はラピッド項と呼ばれ、平均流れ場の変化に直に対応する部分、第3項は壁反射項と呼ばれ、壁が圧力変動を反射する効果である。

スロー項に対する Rotta モデル (乱れを等方化)  $\Pi_{(1)ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \tau_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad C_1 = 1.8$

ラピッド項に対する IPM モデル (生成項の等方化)  $\Pi_{(2)ij} = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad C_2 = 0.6$

壁反射項に対する Shir および Gibson and Launder モデル

$$\Pi_{ij(1)}^w = \sum_{w=1}^{w_0} C'_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( u_k u_m n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} u_k u_i n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{3}{2} u_k u_j n_k^{(w)} n_i^{(w)} \right) \frac{k^{3/2}}{C_l h_n^{(w)} \varepsilon} \quad C'_1 = 0.5, \quad C_l = 2.5$$

$$\Pi_{ij(2)}^w = \sum_{(w)=1}^{w_0} C'_2 \left( \Pi_{km(2)} \bullet n_k^{(w)} n_m^{(w)} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Pi_{ki(2)} \bullet n_k^{(w)} n_j^{(w)} - \frac{3}{2} \Pi_{kj(2)} \bullet n_k^{(w)} n_i^{(w)} \right) \frac{k^{3/2}}{C_l h_n^{(w)} \varepsilon} \quad C'_2 = 0.3$$

## 応力方程式モデル(3)・・・RANS

### 散逸項 $\varepsilon$ のモデル

乱れのレイノルズ数が十分に大きいときには、レイノルズ応力の散逸は、乱れエネルギーの散逸と同様に小さな渦だけで担われると考えると

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

ここで、 $\varepsilon$  の輸送方程式は

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \tau_{ij} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

これは、基本的には拡散項を除いて  $k - \varepsilon$  モデルと同じ形式だが、 $\tau$  に渦粘性仮定でないレイノルズ応力成分が用いられる点が異なっている。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( C_{\varepsilon} u_i u_j \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon)$$

$$C_{\varepsilon} = 0.16 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92$$

## 応力方程式モデル(4)・・・RANS

### 乱流拡散項のモデル化

Daly - Harlow のモデル: 勾配拡散仮定に基づいたモデルで流れ場の非等方性を考慮

$$u'_i u'_j u'_k = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \tau_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_l} \quad C_s = 0.22$$

比較的簡単な流れ場における予測精度が良い、計算も簡便 → 多く使用

Hanjalic - Launder のモデル: 対称性を満足するモデル

$$u'_i u'_j u'_k = -C'_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \tau_{kl} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_l} + \tau_{il} \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_l} + \tau_{jl} \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_l} \right)$$

応力方程式モデルには、 $k - \varepsilon$  モデルのような標準形は確立されていない。

## 応力方程式モデル(5)・・・RANS

### 応力方程式モデルの特徴

応力方程式モデルは、旋回流、流線曲率のある流れ、比較的ゆったりとした非定常流など多くの流れに対して、 $k - \varepsilon$ より優位であることが示されている。

but → 汎用ソフトにはあまり使われていない。

#### Why

- 1 モデルが複雑、方程式が増える → 計算時間の増加( $k - \varepsilon$ と比較して)
- 2 モデルの各部分の検証が不十分
- 3 全ての項に対して初期条件や境界条件を与えることが煩雑
- 4 数値的不安定になりやすい。

## ラージエディシミュレーション(1)・・・LES

ラージエディシミュレーション(large-eddy simulation)(大規模渦シミュレーション)は、直接数値計算(DNS)より粗い格子で、計算格子の幅より大きいスケール(低波数成分)の運動を直接計算し、計算格子幅より小さいスケール(高波数成分)をモデル化して計算する方法である。

### コルモゴロフ則

- (1) エネルギー保有領域: 最も大きいスケールの渦は平均速度分布により直接励起される領域
- (2) エネルギーカスケード: 渦のエネルギーは大きな渦から小さな渦へ移っていく
- (3) 平衡領域(第1相似則): 小さな渦の運動の統計的性質が $\varepsilon$ と $\nu$ のみによって決定される
- (4) 粘性散逸領域: 分子粘性による散逸効果が顕著に現れる領域
- (5) 慣性小領域(第2相似則):  $-5/3$ 乗スペクトルが成り立つ領域

粗視化: ナビエ・ストークスの式に空間平均(フィルター)をかける  
フィルターの幅は通常格子幅程度とされ、この成分をGS成分  
格子幅以下の成分をSS(subgrid scale)成分という。

## ラージエディシミュレーション(2)・・・LES

フィルターをかけた非圧縮性流れの連続の式と運動方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu D_{ij})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

運動方程式をGS流れ場のナビエ・ストークスの式に書き直すと

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + 2\nu D_{ij})$$

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}$$

ここで、Lはレナード項、Cはクロス項、RはSGSレイノルズ応力である

## ラージエディシミュレーション(3)・・・LES

Smagorinsky (スマゴリンスキー) モデル

SGS渦粘性モデル

GSの運動エネルギー  $k_{GS}$  の保存式

$$\frac{\partial k_{GS}}{\partial t} + u_j \frac{\partial k_{GS}}{\partial x_j} = \tau_{ij} D_{ij} - \varepsilon_{GS} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -u_i \tau_{ij} - p u_j + \nu \frac{\partial k_{GS}}{\partial x_j} \right)$$

ここで、 $\tau D$ がSGSへの輸送率となるので

$$\frac{\partial k_{SGS}}{\partial t} + u_j \frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j} = -\tau_{ij} D_{ij} - \varepsilon_{SGS}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \tau_{ij} - \frac{1}{2} (u_i u_i u_j - u_j u_i u_i) - (p u_j - p u_j) + \nu \frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j} \right)$$

$$\varepsilon_{SGS} = -\tau_{ij} D_{ij} \quad \tau_{ij} - \delta_{ij} \tau_{kk} / 3 = -2\nu_e D_{ij}$$

Smagorinskyモデル

$$\varepsilon_{SGS} = (C_s \Delta)^2 D^3 \quad C_s = 0.173$$

## ラージエディシミュレーション(4)・・・LES

### Smagorinsky (スマゴリンスキー) モデルの特徴

- スマゴリンスキー定数  $C_s$  が妥当であれば、エネルギー散逸の総量には良いモデル
- 局所的な SGS 乱れの再現精度は低い
- 一様等方乱流では  $C_s=0.173$  で実験結果とよく一致するが、せん断乱流に対しては低い値 (0.15 ~ 0.10 程度) に修正する必要がある → 普遍定数にならない
- 遷移問題 (層流 ~ 乱流など) を扱う場合においては、スイッチングによって層流場と乱流場を区別する必要がある

数値計算の安定性がある ← 実用計算向き

## ラージエディシミュレーション(5)・・・LES

### その他のモデル

#### (1) Bardina モデル (スケール相似則モデル)

クロス項と SGS レイノルズ応力をモデル化

$$C_{ij} + R_{ij} (= u'_i u'_j + u_i u'_j + u'_i u_j) = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

#### (2) 混合モデル

スケール相似則とスマゴリンスキモデルの和

$$\tau_{ij}^a = L_{ij}^{aa} - (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 D_{kl} D_{kl}} D_{ij}$$

#### (3) ダイナミック渦粘性モデル

スマゴリンスキモデルにおける  $C_s$  を SGS 流れ場  $u$  から求める方法

→ スマゴリンスキモデルの欠点である遷移問題での切り替えが不要

#### (4) 構造関数モデル

SGS 渦粘性係数を構造関数を用いて与えるモデル

## ラージエディシミュレーション(6)・・・LES

計算方法

基本的には、ナビエ・ストークスの非定常計算をそのまま応用する。

(1) SGS渦粘性の計算におけるフィルター代表長さとひずみ速度テンソルの大きさ

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$$

$$\Delta = \sqrt[3]{J} \quad J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right|$$

$$|D|^2 (= 2D_{ij}D_{ij}) = 2(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2) + 4(D_{12}^2 + D_{23}^2 + D_{31}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij}u_i + \delta_{ji}u_j)$$

(2) フィルターのかけ方(2次までを3点中心差分を用いれば)

$$\bar{u}_j = u_j + \frac{\Delta^2}{24} \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2}$$

## 熱移動を伴う乱流解析1

コルバーンの相似則……………乱流熱伝達の概略を知る有用な関係式

$$\text{St} \text{Pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_r^2/2}, \quad \text{St} = \frac{q_w}{\rho c_p U_r (T_w - T_r)}$$

ここで、 $C_f$ は壁面摩擦係数、 $\text{St}$ はスタントン数、 $\text{Pr}$ はプラントル数である。  
求めたいものは壁面熱流速 $q_w$ であるが、流れにより定まる壁面せん断応力から求める。  
最近では、

$$U^+ = \left( \frac{1}{\kappa} \right) \ln y^+ + A, \quad U^+ = \frac{U}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$T^+ = \left( \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \right) \ln y^+ + B, \quad T^+ = \frac{T_w - T}{T_\tau}, \quad T_\tau = \frac{q_w}{\rho c_p u_\tau}$$

が普遍性のある相似側として使われている。

円管内乱流では $\kappa=0.4$ 、 $A=5.5$ 、それ以外では、 $\kappa=0.41$ 、 $A=5.0$

$$\text{Pr}_t = 0.85 \quad B = (3.85 \text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + 2.12 \ln \text{Pr}$$

## 熱移動を伴う乱流解析2

支配方程式

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - u_i u_j \right) - g_i \beta (T - T_r)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} - u_i t \right)$$

標準的な渦粘性モデルの適用

$$-u_i u_j = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$$

$$-u_i t = \alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

渦粘性係数と渦拡散係数を求める必要がある(乱流モデル  $k - \varepsilon$  の適用)

## 熱移動を伴う乱流解析3

低レイノルズ数域を考慮した  $k - \varepsilon$  モデル

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - DIFF(k) = P_k - \varepsilon + G_k + D$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - DIFF(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon + C_{\varepsilon 3} f_3 G_k) + E$$

ここで、

$$DIFF(k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad DIFF(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

$$P_k = -u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad G_k = -g_i \beta u_i t$$

浮力の影響が無視できる場合は  $G_k = 0$  と置く。また、壁面近傍等の妥当性を考えると、最近、Nagano-TagawaモデルがMyong-Kasagiモデルがよく使われるようである。

## 熱移動を伴う乱流解析4

k - ε モデルの定数と関数

Nagano-Tagawa(1990)モデル

$$C_{\mu} = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3$$

$$f_{\mu} = \left(1 - \exp(-y^+ / 26)\right)^2 (1 + 4.1Rt^{3/4})$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = \left(1 - 0.3 \exp\left(-\left(Rt/6.5\right)^2\right)\right) \left(1 - \exp(-y^+ / 6)\right)^2$$

Myong-Kasagi(1990)モデル

$$C_{\mu} = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.4, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.8, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3$$

$$f_{\mu} = \left(1 - \exp(-y^+ / 70)\right) (1 + 3.45 / Rt^{1/2})$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = \left(1 - (2/9) \exp\left(-\left(Rt/6\right)^2\right)\right) \left(1 - \exp(-y^+ / 5)\right)^2$$

浮力項については、通常  $C_{\varepsilon 3} = C_{\varepsilon 1}$ 、 $f_3 = f_1$  と置かれる

## 熱移動を伴う乱流解析5

温度場2方程式モデル

$$\alpha_t = C_{\lambda} f_{\lambda} k \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^l \left(\frac{t^2}{\varepsilon_t}\right)^m = C_{\lambda} f_{\lambda} \frac{k^2}{\varepsilon} (2R)^m$$

$$l + m = 1, \quad R = \frac{\tau_t}{\tau_{\mu}} = \frac{t^2 / 2\varepsilon_t}{k / \varepsilon}$$

ここで、 $t^2$ は温度乱れ強度、 $\varepsilon_t$ は温度乱れ強度の散逸である。

モデル化されたこれらの輸送方程式は、

$$\frac{\partial t^2}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial t^2}{\partial x_j} - \text{DIFF}(t^2) = P_t - 2\varepsilon_t + D_t$$

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \tau} + U_j \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_j} - \text{DIFF}(\varepsilon_t) = \frac{\varepsilon_t}{t^2} \left( C_{P1} f_{P1} \frac{P_t}{2} - C_{D1} f_{D1} \varepsilon_t \right) + \frac{\varepsilon_t}{k} (C_{P2} f_{P2} P_k - C_{D2} f_{D2} \varepsilon) + E_t$$

$$\text{DIFF}(t^2) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial t^2}{\partial x_j} \right), \quad \text{DIFF}(\varepsilon_t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_j} \right)$$

$$P_t = -2u_j t \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad P_k = -u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

## 熱移動を伴う乱流解析6

温度場2方程式モデルの定数と関数

Nagano-Kim(1988)モデル

$$C_\lambda = 0.11, \quad C_{p1} = 1.80, \quad C_{p2} = 0.72, \quad C_{D1} = 2.2, \quad C_{D2} = 0.8, \quad \sigma_h = 1.0, \quad \sigma_\phi = 1.0$$

$$f_\lambda = \left(1 - \exp\left(-\left(\sqrt{\text{Pr}}/30.5\right)\left(2/C_f\right)\text{St} y^+\right)\right)^2, \quad f_{p1} = 1.0, \quad f_{p2} = 1.0$$

$$f_{D1} = 1.0, \quad f_{D2} = 1.0, \quad D_t = -2\alpha \left(\frac{\partial \sqrt{t^2}}{\partial y}\right)^2, \quad E_t = \alpha \alpha_t (1 - f_\lambda) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)^2$$

Nagano's(1991)モデル

$$C_\lambda = 0.10, \quad C_{p1} = 1.70, \quad C_{p2} = 0.64, \quad C_{D1} = 2.0, \quad C_{D2} = 0.9, \quad \sigma_h = 1.0, \quad \sigma_\phi = 1.0$$

$$f_\lambda = \left(1 - \exp\left(-\left(\sqrt{\text{Pr}}/26\right)y^+\right)\right)^2 \left(1 + 3.4/R_h^{3/4}\right), \quad f_{p1} = 1.0, \quad f_{p2} = 1.0$$

$$f_{D1} = \left(1 - \exp\left(-y^+/5.8\right)\right)^2, \quad f_{D2} = \frac{1}{C_{D2}} (C_{e2} f_2 - 1) \left(1 - \exp\left(-y^+/6\right)\right)^2, \quad D_t = 0, \quad E_t = 0$$

## 熱移動を伴う乱流解析7

モデルの改良

速度場のモデル

Nagano - Tagawaモデル, Myong - Kasagiモデル → 正しい壁面漸近解

Nagano - Hishidaモデル → 数値計算上の安定性、収束性に優れる

温度場のモデル

Nagano - Tagawa - Tsujiモデル → 乱流熱流速の正しい壁面漸近挙動を再現

Nagano - Kimモデル → 数値計算上の困難さなし



速度場: Nagano - Hishidaモデルを基本として、NTモデル、MKモデルと同様の解

温度場: Nagano - Kimモデルを基本として、NTTモデルと同様の解

速度場に関して、

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - D = \varepsilon + 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}\right)^2$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\hat{\varepsilon}}$$

## 熱移動を伴う乱流解析 8

Nagano - Tagawaモデルと同様な $f_\mu$ が使用可能である

$$f_\mu = \left(1 - \exp(-y^+/A^+)\right)^2 \left(1 + (20/Rt^{3/4}) \exp(-(Rt/120)^2)\right)$$

$$A^+ = \frac{30}{1 + 11.8P^+}, \quad P^+ = \nu(dP/dx)/(\rho u_\tau^3)$$

これで、安定で壁面での正しい漸近解を与えることができる。

モデル定数をまとめると、

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$f_\mu = \left(1 - \exp(-y^+/A^+)\right)^2 \left(1 + (20/Rt^{3/4}) \exp(-(Rt/120)^2)\right)$$

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Rt^2)$$

$$D = -2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, \quad E = \nu \nu_t (1 - f_{wt}) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$$

$$f_{wt} = \left(1 - \exp(-y^+/30)\right)^2, \quad A^+ = \frac{30}{1 + 11.8P^+}$$

壁面境界条件は、 $U = k = 0, \quad \varepsilon = 0$ である。

## 熱移動を伴う乱流解析 9

温度場2方程式モデルの改良、速度場と同様に、

$$\hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t + \alpha \left( \frac{\partial \sqrt{\Delta t^2}}{\partial y} \right)^2, \quad \Delta t^2 = \overline{t^2} - \overline{t_w}^2$$

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda \sqrt{\left( \frac{k}{\hat{\varepsilon}} \right) \left( \frac{\overline{t^2}}{\hat{\varepsilon}_t} \right)} = C_\lambda f_\lambda \frac{k^2}{\hat{\varepsilon}} (2R)^{1/2}$$

ここで、モデル関数は、

$$f_\lambda = \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right)\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A_\lambda^+}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{B_\lambda}{R_t^{3/4}}\right) \exp\left(-\left(\frac{R_t}{120}\right)^2\right)\right)$$

一般に、壁面近傍の粘性底層の厚さに対する熱伝導の支配的な伝導底層の厚さの比は、プラントル数によって変化する。そこで、

$$A_\lambda^+ = A^+ / \text{Pr}^{1/3}$$

## 熱移動を伴う乱流解析 10

これで、Nagano - Kimモデルの長所を保持し、Nagano - Tagawa - Tsujiモデルと同様の解を与えるモデルとなる。得られたモデル定数とモデル関数をまとめると

$$C_\lambda = 0.1, \quad C_{P1} = 1.7, \quad C_{P2} = 0.64, \quad C_{D1} = 2.0, \quad C_{D2} = 0.9$$

$$\sigma_h = \sigma_\phi = 1.0$$

$$f_\lambda = \left(1 - \exp(-y^+/A^+)\right) \left(1 - \exp(-y^+/A_\lambda^+)\right) \\ \times \left(1 + (B_\lambda/Rt^{3/4}) \exp(-(Rt/120)^2)\right)$$

$$f_{P1} = 1.0, \quad f_{P2} = 1.0, \quad f_{D1} = 1.0, \quad f_{D2} = \frac{1}{C_{D2}}(C_{\epsilon 2} f_2 - 1)$$

$$D_t = -2\alpha \left( \frac{\partial \sqrt{\Delta t^2}}{\partial y} \right)^2, \quad E_t = \alpha \alpha_t (1 - f_{w2}) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^2$$

$$f_{w2} = \left(1 - \exp(-y^+/(30/Pr^{1/3}))\right)^2, \quad A_\lambda^+ = \frac{A^+}{Pr^{1/3}}, \quad B_\lambda = 7.9$$

## 参考図書

- 有限要素法流体解析, 日科技連, 川原睦人, 1985
- パソコンで解く熱と流れ, 丸善, 小竹進・土方邦夫, 1988
- 数値流体力学, 東京大学出版会, 荒川忠一, 1994
- 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, 数値流体力学編集委員会編, 1995
- 乱流解析, 東京大学出版会, 数値流体力学編集委員会編, 1995
- 熱流体力学, 共立出版, 中山顕・桑原不二朗・許国良, 2002
- 数値流体力学ハンドブック, 丸善, 編集委員長小林敏雄, 2003
- 流れの数値計算と可視化第2版, 丸善, 平野博之, 2004
- 流体計算と差分法, 朝倉書店, 桑原邦郎・河村哲也, 2005
- 計算力学ハンドブック(差分法・有限体積法 熱流体編), 丸善, 日本機械学会, 2006
  
- パソコンで学ぶ流体力学, 森北出版, 石綿良三, 1993
- Excelで学ぶ流体力学, 丸善, 森下悦生, 2000
- パソコンで見る流れの科学, 講談社, 矢川元基, 2001